ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
https://courses.ite.inf.ethz.ch/theo_inf_21

Übungsaufgaben – Blatt 10

Zürich, 3. Dezember 2021

Aufgabe 28

Das *Subset-Sum-Problem* (kurz SUBSET-SUM) ist das folgende Entscheidungsproblem: Gegeben eine endliche Menge $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ von natürlichen Zahlen, und eine natürliche Zahl t, ist zu entscheiden, ob es eine Teilmenge $U \subseteq S$ gibt, so dass $\sum_{x \in U} x = t$. Wir wollen zeigen, dass

$$3\mathrm{SAT} \leq_p \text{SUBSET-SUM}$$

gilt.

Für eine Reduktion müssen wir aus einer Formel in 3KNF eine Instanz des Subset-Sum-Problems konstruieren. Sei also $\Phi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ eine Formel in 3KNF über der Variablenmenge $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass jede Variable x_i in mindestens einer Klausel C_j vorkommt und dass in keiner Klausel der Formel eine Variable und ihre Negation gemeinsam vorkommen.

Wir konstruieren jetzt für jede Variable x_i zwei $(n+k)$-stellige Dezimalzahlen r_i und r'_i und für jede Klausel C_j zwei $(n+k)$-stellige Dezimalzahlen s_j und s'_j. Die Menge S der SUBSET-SUM-Instanz wird aus genau diesen $2(n+k)$ Zahlen bestehen.

Die Idee der Konstruktion ist, dass jede der ersten n Stellen der Zahlen einer der Variablen zugeordnet ist und jede der letzten k Stellen einer Klausel. Mit $x[l]$ bezeichnen wir die l-te Stelle von $x \in S$, d. h. $x = x[1]x[2] \ldots x[n+k]$.

Damit können wir die Zahlen in S für alle $1 \leq i \leq n$ und alle $1 \leq j \leq k$ und die gewünschte Summe t definieren durch

$$r_i[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = i \text{ oder } (n+1 \leq l \leq n+k \text{ und } x_i \text{ kommt als Literal in } C_{l-n} \text{ vor}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$r'_i[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = i \text{ oder } (n+1 \leq l \leq n+k \text{ und } \overline{x_i} \text{ kommt als Literal in } C_{l-n} \text{ vor}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s_j[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } l = n+j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$s'_j[l] = \begin{cases} 2 & \text{für } l = n+j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$t[l] = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq l \leq n \\ 4 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für diese Reduktion gilt, dass Φ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine Teilmenge $U \subseteq S$ gibt mit $\sum_{x \in U} x = t$. **10 Punkte**

Aufgabe 29

Sei Σ ein beliebiges Alphabet mit $|\Sigma| \geq 2$. Sei $w = a_1 a_2 \ldots a_m$ ein Wort, mit $a_i \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq m$. Wir sagen, dass ein Wort $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ eine *Teilsequenz* von w ist, falls $n \leq m$ und Indizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ existieren, so dass $x_j = w_{i_j}$ gilt für alle $1 \leq j \leq n$. Anschaulich kommen also alle Zeichen von x in derselben Reihenfolge in w vor, aber nicht notwendigerweise direkt aufeinanderfolgend.

Ein Wort w über Σ ist eine *Davenport-Schinzel-Sequenz* der Ordnung d, wenn es die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Keine zwei aufeinanderfolgenden Zeichen in w sind gleich,

(ii) für alle $a, b \in \Sigma$ mit $a \neq b$ gilt, dass es keine Teilsequenz $(ab)^{1+(d/2)}$ (für gerade d) oder $(ab)^{(d+1)/2}a$ (für ungerade d) in w gibt.

Geben Sie eine aussagenlogische Formel in KNF an, die beschreibt, ob es für ein gegebenes Alphabet Σ mit $|\Sigma| = k \geq 2$ und eine gegebene natürliche Zahl m eine Davenport-Schinzel-Sequenz der Ordnung 2 und der Länge m über Σ gibt. **10 Punkte**

Abgabe: Bis Freitag, den 10. Dezember 2021, bis spätestens 11:15 Uhr als gut lesbares PDF per E-Mail direkt an die Übungsgruppenleiterin oder den Übungsgruppenleiter.