ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
https://courses.ite.inf.ethz.ch/theo_inf_21

Lösungsvorschläge – Blatt 1

Zürich, 1. Oktober 2021

Lösung zu Aufgabe 1

(a) Wenn ein Wort der Länge $n \in \mathbb{N}$ nicht das Teilwort 01 enthält, dann hat es die Form $1^l 0^m$ für irgendwelche $l, m \in \mathbb{N}$ mit $l + m = n$. Für ein gegebenes n gilt also $0 \leq l \leq n$ und m ist durch die Wahl von l eindeutig bestimmt. Damit gibt es genau $n + 1$ solche Wörter der Länge n.

(b) Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit L_n die Menge der Wörter aus Σ^n, die nicht das Teilwort 00 enthalten und setzen $N(n) = |L_n|$. Wir wollen $N(n)$ rekursiv bestimmen. Offenbar gilt $N(0) = 1$, denn es gibt nur das Wort λ der Länge 0 über $\{0, 1\}$ und dieses enthält 00 nicht als Teilwort. Ausserdem gilt $N(1) = 2$, weil die Wörter 0 und 1 beide 00 nicht als Teilwort enthalten.

Wenn wir nun ein Wort $w \in L_{n+1}$ mit $n \geq 1$ betrachten, dann können wir w schreiben als $w = xab$ mit $a, b \in \{0, 1\}$ und $x \in L_{n-1}$. Falls $b = 1$, dann ist für xa ein beliebiges Wort aus L_n möglich. Falls $b = 0$, dann muss $a = 1$ gelten, aber für x ist ein beliebiges Wort aus L_{n-1} möglich. Damit ergibt sich für $N(n)$ die Rekurrenzgleichung

$$N(n + 1) = N(n) + N(n - 1)\,.$$

Dies ist offenbar die bekannte Rekurrenz der Fibonaccizahlen, die definiert sind durch $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$ für alle $n \geq 2$. Wegen der Anfangsbedingungen $N(0) = 1$ und $N(1) = 2$ gilt also

$$N(n) = F(n + 2)\,.$$

Die Folge der Fibonaccizahlen kann man explizit beschreiben durch die Formel von Moivre-Binet als

$$F(n) = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}\,,$$

wobei $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Damit ergibt sich für $N(n)$ die explizite Darstellung

$$N(n) = \frac{\varphi^{n+2} - (1 - \varphi)^{n+2}}{\sqrt{5}}\,.$$

(c) Wir haben in Aufgabenteil (a) gesehen, dass jedes Wort der Länge n, dass das Teilwort 01 nicht enthält, die Form $1^l 0^m$ haben muss für $l + m = n$. Sei zunächst $n \geq 2$. Die einzigen Wörter dieser Form, die nicht das Teilwort 00 enthalten, sind 1^n und $1^{n-1}0$, also gibt es für jedes $n \geq 2$ genau 2 solche Wörter. Für $n \leq 1$ erfüllen alle Wörter die Bedingung, also gibt es ein Wort der Länge 0 und zwei Wörter der Länge 1, die die Bedingung erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Sei Σ ein Alphabet und seien $u, v \in \Sigma^*$. Dann existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $u = u_1 u_2 \dots u_k$ und $v = v_1 v_2 \dots v_l$, wobei $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l \in \Sigma$. Damit ist

$$uv = u_1 u_2 \dots u_k v_1 v_2 \dots v_l$$

und somit

$$\begin{aligned}(uv)^{\mathsf{R}} &= v_l \dots v_2 v_1 u_k \dots u_2 u_1 \\ &= v^{\mathsf{R}} u^{\mathsf{R}},\end{aligned}$$

weil $v^{\mathsf{R}} = v_l \dots v_2 v_1$ und $u^{\mathsf{R}} = u_k \dots u_2 u_1$ gilt.

(b) Diese Aussage ist falsch und wir können ein Gegenbeispiel angeben. Sei $L_1 = \{\lambda\}$ und $L_2 = \{a\}^*$. Dann ist $L_2 - L_1 = \{a\}^+$, also $L_2(L_2 - L_1) = \{a\}^*\{a\}^+ = \{a\}^+$. Andererseits ist $(L_2)^2 = \{a\}^*\{a\}^* = \{a\}^*$ und $L_2 L_1 = \{a\}^*\{\lambda\} = \{a\}^*$, also $(L_2)^2 - (L_2 L_1) = \{a\}^* - \{a\}^* = \emptyset$.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Wir wählen $\Sigma = \{a\}$ und

$$L_1 = \{a, aa, \dots, a^k\} = \{a^i \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Dann gilt für

$$L_2 = \{\lambda, a\},$$

dass

$$\begin{aligned}L_1 \cdot L_2 &= L_1 \cdot \{\lambda\} \cup L_1 \cdot \{a\} \\ &= L_1 \cup \{a^i a \mid 1 \leq i \leq k\} \\ &= L_1 \cup \{a^i \mid 2 \leq i \leq k+1\} \\ &= \{a^i \mid 1 \leq i \leq k+1\},\end{aligned}$$

also ist $|L_1 L_2| = k + 1$.

(b) Wir wählen $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$L_1 = \{a^i \mid 1 \leq i \leq k\}$$

und

$$L_2 = \{b^i \mid 1 \leq i \leq l\}$$

Dann ist

$$L_1 L_2 = \{a^i b^j \mid 1 \leq i \leq k \text{ und } 1 \leq j \leq l\},$$

also $|L_1 L_2| = k \cdot l$.

(c) Um dieselbe Grösse von $L_1 \cdot L_2$ über einem einbuchstabigen Alphabet zu erreichen, müssen wir sicherstellen, dass jedes Paar von Wörtern aus L_1 und L_2 ein unterschiedliches Gesamtwort erzeugt. Dies können wir erreichen, wenn wir die Längen der Wörter in L_1 so wählen, dass wir für jedes $v \in L_1$ durch das Anhängen eines beliebigen Wortes $w \in L_2$ nicht das nächstlängere Wort aus L_1 erreichen können. Die Idee ist also, die Längen der Wörter in L_2 möglichst klein zu halten und die Längen der Wörter in L_1 hinreichend unterschiedlich zu wählen. Sei $\Sigma = \{a\}$. Dann setzen wir

$$L_1 = \{a^{li} \mid 0 \leq i \leq k-1\}$$

und

$$L_2 = \{a^j \mid 0 \leq j \leq l-1\}\,.$$

Dann ist

$$L_1 L_2 = \{a^{li} a^j \mid 0 \leq i \leq k-1 \text{ und } 0 \leq j \leq l-1\}\,.$$

Alle Wörter in $L_1 L_2$ haben paarweise unterschiedliche Längen, weil alle Wortlängen in L_1 Vielfache von l sind und alle Wörter in L_2 kürzer als l sind. Also gilt $|L_1 L_2| = k \cdot l$.