ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
https://courses.ite.inf.ethz.ch/theo_inf_21

Lösungsvorschläge – Blatt 3

Zürich, 15. Oktober 2021

Lösung zu Aufgabe 7

Nach Definition 2.19 aus dem Buch heisst ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ zufällig, wenn $K(w) \geq |w|$ gilt. Wir zeigen im Folgenden mit einem einfachen Abzählargument, dass für mindestens die Hälfte aller Wörter $w \in \{0,1\}^*$ mit $0 \leq |w| \leq n$ sogar gilt, dass $K(w) \geq n$. Damit folgt unmittelbar die Behauptung.

Es gibt $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ Wörter über $\{0,1\}$ der Länge höchstens n.

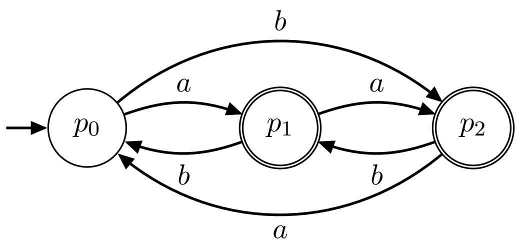
Auf der anderen Seite gibt es $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$ Wörter über $\{0,1\}$ der Länge höchstens $n-1$. Damit gibt es auch höchstens $2^n - 1$ Binärkodierungen von Programmen der Länge höchstens $n-1$. Da zwei unterschiedliche Wörter von unterschiedlichen Programmen ausgegeben werden müssen, gibt es also höchstens $2^n - 1 \leq \frac{1}{2} \cdot (2^{n+1} - 1)$ Wörter mit einer Kolmogorov-Komplexität von höchstens $n-1$. Damit folgt sofort die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 8

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} L_1 &= \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a + 2 \cdot |w|_b + 1) \bmod 3 \neq 1\} \\ &= \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a - |w|_b) \bmod 3 \neq 0\}. \end{aligned}$$

Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache L_1:



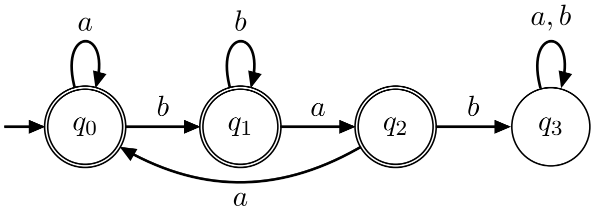
Dieser Automat zählt einfach die Buchstaben in der Eingabe modulo 3, wobei entsprechend der geforderten Bedingung jedes a positiv und jedes b negativ gezählt werden. Damit gilt für die Klassen, dass

$$\mathrm{Kl}[p_i] = \{w \in \{a,b\}^* \mid (|w|_a - |w|_b) \bmod 3 = i\}$$

für $i \in \{0,1,2\}$.

(b) Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache

$$L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bab \text{ nicht}\}.$$



Der Automat arbeitet mit denselben Transitionen wie ein Automat, der einfach das Muster bab in der Eingabe sucht. Im Zustand q_i wurde an der aktuellen Position der Eingabe bereits ein Präfix der Länge i des Musters gefunden. Weil der Automat alle Wörter akzeptieren soll, die das Muster nicht enthalten, sind alle Zustände bis auf q_3 akzeptierend.

Es ergeben sich die folgenden Klassen für die Zustände:

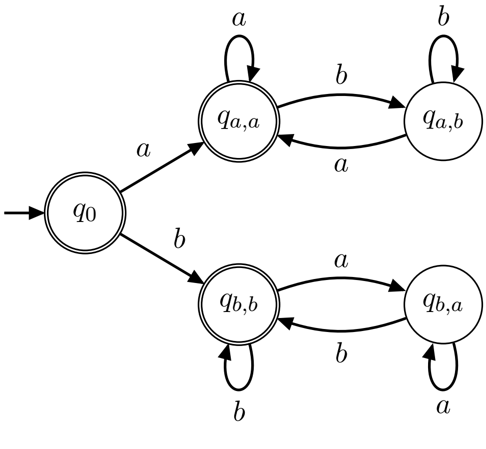
$$\begin{aligned}
\mathrm{Kl}[q_3] &= \{a,b\}^* - L_2\,, \\
\mathrm{Kl}[q_2] &= \{xba \mid x \in \{a,b\}^*\} \cap L_2\,, \\
\mathrm{Kl}[q_1] &= \{xb \mid x \in \{a,b\}^*\} \cap L_2\,, \\
\mathrm{Kl}[q_0] &= \{a,b\}^* - \bigcup_{i=1}^{3} \mathrm{Kl}[q_i]\,.
\end{aligned}$$

Man bemerke, dass es oftmals hilfreich ist, die Reihenfolge der Klassenbeschreibungen geschickt auszuwählen.

Lösung zu Aufgabe 9

(a) Der folgende endliche Automat akzeptiert die Sprache

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } ab \text{ gleich oft wie das Teilwort } ba\}.$$



Beim Lesen der Buchstaben in w von links nach rechts kommt ab genau für jeden Wechsel von a nach b einmal als Teilwort vor und analog ba genau einmal für jeden Wechsel von b nach a. Somit kommen ab und ba genau dann gleich oft in w als

Teilwort vor, wenn w entweder das leere Wort λ ist oder w mit demselben Buchstaben beginnt dem es endet. Letztere Bedingung ist insbesondere für $w = a$ und für $w = b$ erfüllt. Wenn w mit a beginnt, prüft der Automat in den beiden oberen Zuständen, ob der zuletzt gelesene Buchstabe mit dem zuerst gelesenen übereinstimmt. Wenn w mit b beginnt, tut er dasselbe in den beiden unteren Zuständen.

(b) Es ergeben sich die folgenden Klassen für die Zustände:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kl}[q_0] &= \{\lambda\} \text{ und} \\
\mathrm{Kl}[q_{x,y}] &= \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } x \text{ und endet mit } y\} \text{ für alle } x, y \in \{a,b\}.
\end{aligned}$$