

Lösungsvorschläge – Blatt 9

Zürich, 3. Dezember 2021

Lösung zu Aufgabe 25

- (a) Die Idee unserer Reduktion ist es, SCP als eine Verallgemeinerung von VC anzusehen.

Die Eingabe für VC ist ein Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k . Jede solche Eingabe bilden wir wie folgt auf eine Eingabe für SCP ab. Sei $E_v := \{e \in E \mid v \text{ ist inzident zu } e\}$ die Menge der mit dem Knoten v inzidenten Kanten und sei $\mathcal{S}_G = \{E_v \mid v \in V\}$. Dann ist

$$(E, \mathcal{S}_G, k)$$

unsere Eingabe für SCP. Die Mengenfamilie \mathcal{S}_G enthält also für jeden Knoten v die Menge aller Kanten, die inzident mit v sind. Man beachte, dass zwei Knoten v und w dieselbe Menge $E_v = E_w$ inzidenter Kanten haben können; in diesem Fall ist E_v nur einmal in \mathcal{S} enthalten.

Die Transformation ist offensichtlich in polynomieller Zeit durchführbar. Es bleibt noch zu zeigen, dass (G, k) genau dann eine zu akzeptierende Eingabe für VC ist, wenn (E, \mathcal{S}_G, k) eine zu akzeptierende Eingabe für SCP ist.

Angenommen, es gibt ein Vertex-Cover der Grösse k in G . Dann gibt es eine Menge von k Knoten $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, die alle Kanten in G überdeckt. Wir können die überdeckten Kanten zudem durch $\bigcup_{i=1}^k E_{v_i}$ beschreiben. Jede Menge E_{v_i} ist in \mathcal{S}_G . Dementsprechend gibt es ein Set-Cover der Grösse höchstens k für (E, \mathcal{S}_G, k) .

Angenommen, es gibt ein Set-Cover der Grösse k für (E, \mathcal{S}_G, k) . Dann gibt es ein $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}_G$, so dass $|\mathcal{C}| = k$ und $\bigcup_{S \in \mathcal{C}} S = E$ gilt. Damit ist die Menge der k Knoten, die in unserer Reduktion auf die Mengen aus \mathcal{C} abgebildet werden, inzident mit allen Kanten aus E . Dementsprechend bilden diese Knoten ein Vertex-Cover der Grösse k in G . Falls mehrere Knoten dieselbe Menge inzidenter Kanten haben und deshalb auf dieselbe Menge aus \mathcal{C} abgebildet werden, reicht es offenbar aus, für jede solche Menge aus \mathcal{C} einen solchen Knoten für den Vertex-Cover auszuwählen.

- (b) Sei (X, \mathcal{S}, k) eine Eingabe für SCP mit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ und einer natürlichen Zahl k . Jede solche Eingabe bilden wir wie folgt auf eine Eingabe (G, k) mit $G = (V, E)$ für DS ab. Für die Knoten von G gilt $V = V_X \cup V_S$ mit $V_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und $V_S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, wobei V_X also den Elementen aus

X entspricht und V_S den Mengen aus \mathcal{S} . Für die Kanten von G gilt zum einen, dass die Knoten aus V_S eine Clique bilden. Ferner ist

$$\{x_i, s_j\} \in E \iff x_i \in S_j,$$

d. h., eine Kante zwischen einem Knoten von V_X und einem Knoten von V_S gibt es genau dann, wenn das Element $x_i \in X$ in der Menge $S_j \in \mathcal{S}$ enthalten ist, das S_j das Element x_i also überdeckt. Es gibt keine Kanten zwischen den Knoten aus V_X . Diese Konstruktion kann offensichtlich in polynomieller Zeit durchgeführt werden.

Sei nun (X, \mathcal{S}, k) eine Eingabe für SCP, so dass X ein Set-Cover aus \mathcal{S} der Grösse k besitzt; sei \mathcal{C} ein solches Set-Cover. Die entsprechenden Knoten aus V_S sind ein Dominating-Set D derselben Grösse, was wie folgt begründet werden kann. Alle Knoten aus V_S sind trivialerweise dominiert, da V_S eine Clique ist. Ferner ist jeder Knoten aus V_X adjazent zu einem ausgewählten Knoten in V_S , da jedes Element aus X in mindestens einer Menge aus \mathcal{C} beinhaltet ist.

Sei andererseits D ein Dominating-Set der Grösse k von G . Falls $D \subseteq V_S$, ist die entsprechende Auswahl an Mengen aus \mathcal{S} ein Set-Cover der gleichen Grösse für X , was wie oben begründet werden kann. Falls ein Knoten $x \in D \setminus V_S$ existiert, so können wir D modifizieren, indem wir x gegen einen adjazenten Knoten aus V_S austauschen. Die beiden Knoten bleiben dabei dominiert und kein anderer Knoten von V_X verliert mit x einen dominierenden Knoten, da sie untereinander nicht verbunden sind, während die Knoten aus V_S in jedem Fall dominiert sind (da V_S eine Clique ist).

Lösung zu Aufgabe 26

Sei ϕ eine Eingabe für 3SAT, also eine 3KNF-Formel $\phi = C_1 \wedge \dots \wedge C_m$ mit den Klauseln C_1, \dots, C_m über den Variablen aus $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wir wollen ϕ in eine Eingabe ψ für E3SAT verwandeln. Hierfür modifizieren wir ϕ zunächst so, dass in keiner Klausel eine Variable mehrfach auftaucht. Dazu streichen wir allfällige Wiederholungen eines Literals innerhalb einer Klausel ersatzlos. An der Erfüllbarkeit ändert sich dadurch nichts. Enthält eine Klausel zugleich eine Variable y und ihre Negation \bar{y} als Literal, so ist die gesamte Klausel für jede beliebige Belegung erfüllt. Solche Klauseln können wir also ersatzlos aus ϕ streichen, ohne die Erfüllbarkeit zu beeinflussen. Insgesamt dürfen wir daher davon ausgehen, dass in jeder Klausel von ϕ jede Variable höchstens einmal vorkommt. Die Literale einer Klausel gehören dann immer zu paarweise unterschiedlichen Variablen.

Wir können ψ jetzt wie folgt konstruieren: Alle Klauseln von ϕ , die bereits drei Literale enthalten, bleiben unverändert. Eine Klausel $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2})$ wird ersetzt durch die zwei neuen Klauseln $C_{i,1} = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee y_i)$ und $C_{i,2} = (l_{i,1} \vee l_{i,2} \vee \bar{y}_i)$, wobei y_i eine neue Variable ist, die sonst nirgends in ψ vorkommt. Eine Klausel $C_i = (l_i)$ wird ersetzt durch die vier neuen Klauseln $C_{i,1} = (l_i \vee y_{i,1} \vee y_{i,2})$, $C_{i,2} = (l_i \vee y_{i,1} \vee \bar{y}_{i,2})$, $C_{i,3} = (l_i \vee \bar{y}_{i,1} \vee y_{i,2})$ und $C_{i,4} = (l_i \vee \bar{y}_{i,1} \vee \bar{y}_{i,2})$, wobei $y_{i,1}$ und $y_{i,2}$ zwei neue Variablen sind, die sonst nirgends in ψ vorkommen. Offenbar ist diese Konstruktion in polynomieller Zeit durchführbar und die Zusatzbedingungen von E3SAT gegenüber 3SAT sind erfüllt.

Wir zeigen nun, dass ϕ genau dann erfüllbar ist, wenn ψ erfüllbar ist.

Sei α eine erfüllende Belegung für ϕ . Dann setzt α mindestens ein Literal in jeder der Klauseln C_1, \dots, C_m auf 1. Damit ist aber durch eine beliebige Erweiterung von α auch jede Klausel von ψ erfüllt, weil diese Klauseln höchstens noch zusätzliche Literale enthalten.

Sei β eine erfüllende Belegung für ψ . Dann werden alle Klauseln in ψ von β erfüllt. Wir wollen zeigen, dass die Einschränkung von β auf die Variablen aus X dann auch ϕ erfüllt.

Jede Klausel aus ϕ der Länge 3 wurde unverändert in ψ übernommen und wird offenbar von β erfüllt. Für eine Klausel $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2})$ der Länge 2 in ϕ gibt es in ψ die beiden Klauseln $C_{i,1}$ und $C_{i,2}$. Die Variable y_i kommt in einer dieser beiden Klauseln positiv vor und in der anderen Klausel negativ. Wir nehmen zunächst an, dass $\beta(y_i) = 1$. Da nach Voraussetzung jede Klausel in ψ von β erfüllt wird, ist auch $C_{i,2}$ erfüllt, obwohl das Literal \bar{y}_i hier auf 0 gesetzt ist. Also muss $C_i = (l_{i,1} \vee l_{i,2})$ von β erfüllt werden. Der Fall, dass $\beta(y_i) = 0$ gilt, ist analog.

Für eine Klausel C_i der Länge 1 in ϕ gibt es vier Klauseln in ψ , so dass für jede Belegung der beiden neuen Variablen $y_{i,1}$ und $y_{i,2}$ eine dieser Klauseln nur erfüllt sein kann, wenn auch C_i erfüllt wird. Insgesamt erfüllt β also alle Klauseln von ϕ .

Lösung zu Aufgabe 27

Wir zeigen zunächst, dass LARGE-CLIQUE NP-vollständig ist. In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass CLIQUE in NP enthalten ist. Weil jede LARGE-CLIQUE-Instanz insbesondere eine Instanz von CLIQUE ist, ist mit derselben Argumentation auch LARGE-CLIQUE in NP (man muss zusätzlich nur noch die Bedingung $k \geq |V|/3$ prüfen).

Um zu zeigen, dass LARGE-CLIQUE eine NP-schwere Sprache ist, zeigen wir $E3SAT \leq_p$ LARGE-CLIQUE. Wir verwenden hierfür exakt dieselbe Reduktion wie beim Beweis von $SAT \leq_p$ CLIQUE im Buch, um eine Formel in E3KNF in eine CLIQUE-Instanz (G, k) umzuwandeln. Für eine Formel ϕ mit m Klauseln hat der konstruierte Graph $G = (V, E)$ genau $3m$ Knoten. Nach Konstruktion gilt $k = m = |V|/3$. Mit dem Beweis von Lemma 6.9 aus dem Buch folgt also unmittelbar die Behauptung.

Wir zeigen nun, dass VERY-LARGE-CLIQUE in P liegt. Für einen Graphen mit n Knoten können wir einfach alle $\binom{n}{n-3} + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \in O(n^3)$ möglichen Teilmengen von mindestens $n-3$ Knoten darauf überprüfen, ob diese eine Clique bilden. Diese Überprüfung ist offenbar für jede der Teilmengen in Zeit $O(n^2)$ möglich. Es ergibt sich also insgesamt eine polynomielle Laufzeit in $O(n^5)$.