ETH zürich
Departement Informatik

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Juraj Hromkovič
Dr. Hans-Joachim Böckenhauer
`https://courses.ite.inf.ethz.ch/theo_inf_21`

Lösungsvorschläge – Blatt 10

Zürich, 10. Dezember 2021

Lösung zu Aufgabe 28

Wir betrachten die in der Aufgabenstellung beschriebene Reduktion und zeigen, dass die Formel Φ genau dann erfüllbar ist, wenn es eine Teilmenge $U \subseteq S$ gibt mit $\sum_{x \in U} x = t$.

Sei α eine erfüllende Belegung von Φ. Wir konstruieren hieraus eine Teilmenge U_α wie folgt: Für jede Variable x_i mit $\alpha(x_i) = 1$ wählen wir $r_i \in U_\alpha$, für jede Variable x_i mit $\alpha(x_i) = 0$ wählen wir $r'_i \in U_\alpha$. Für jede Klausel C_j, in der α alle drei Literale erfüllt, nehmen wir zusätzlich noch s_j in U_α auf. Analog nehmen wir s'_j in U_α auf, falls α in C_j genau zwei Literale erfüllt und wir fügen s_j und s'_j zu U_α hinzu, falls α in C_j genau ein Literal erfüllt. Es ist zu zeigen, dass für die so definierte Menge U_α gilt, dass $\sum_{x \in U_\alpha} x = t$.

Wir bemerken zunächst, dass an keiner Stelle in der Addition ein Übertrag auftreten kann. Die Stelle i ist für alle $1 \leq i \leq n$ nur in den beiden Zahlen r_i und r'_i gleich 1 und in allen anderen Zahlen gleich 0. Für alle $1 \leq j \leq k$ ist die Stelle $n + j$ nur in höchstens fünf Zahlen ungleich Null, nämlich 1 in den maximal drei Zahlen r_i bzw. r'_i, so dass x_i in C_j positiv bzw. negativ vorkommt, und 1 bzw. 2 in den beiden Zahlen s_j und s'_j. Die Summe an dieser Stelle kann also den Wert 6 nicht übersteigen. Damit können wir für den Beweis die einzelnen Stellen der Zahlen unabhängig voneinander betrachten.

Wir analysieren zunächst die Stelle i für $1 \leq i \leq n$. Da α die Variable x_i entweder mit $\alpha(x_i) = 0$ oder $\alpha(x_i) = 1$ belegt, wurde genau eine der beiden Zahlen r_i und r'_i in U_α aufgenommen. Da die Stelle i in allen anderen Zahlen eine Null enthält, ist die Summe an dieser Stelle gleich $t[i] = 1$. Wenn α in der Klausel C_j genau l Literale erfüllt, für ein $l \in \{1, 2, 3\}$, dann tragen die entsprechend ausgewählten Zahlen r_i und r'_i für diese Literale einen Betrag von l zu der Summe an der Stelle $n+j$ bei. Zusammen mit den nach der oben beschriebenen Vorschrift gegebenenfalls hinzugefügten Zahlen s_j und s'_j ergibt sich hier immer eine Summe von $t[n + j] = 4$. Damit erfüllt U_α die Bedingung, dass $\sum_{x \in U_\alpha} x = t$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass U eine Teilmenge von S ist, die $\sum_{x \in U_\alpha} x = t$ erfüllt. Wir konstruieren hieraus eine Belegung α_U für Φ wie folgt: Falls $r_i \in U$, dann setzen wir $\alpha_U(x_i) = 1$, falls $r'_i \in U$, dann setzen wir $\alpha_U(x_i) = 0$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ muss wegen $t[i] = 1$ genau einer dieser beiden Fälle auftreten, damit ist α_U wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass α_U die Formel Φ erfüllt. Da $t[n + j] = 4$, sich die Zahlen s_j und s'_j an der Stelle $n+j$ aber nur zu höchstens 3 aufsummieren, muss für jede Stelle $n+j$ mit $1 \leq j \leq k$ eine der Zahlen r_i oder r'_i mit $r_i[n + j] = 1$ bzw. $r'_i[n + j] = 1$ in U enthalten sein. Falls dies eine Zahl r_i ist, dann wurde $\alpha_U(x_i) = 1$ gesetzt. Nach der Konstruktion tritt die Variable x_i in C_j positiv auf (weil $r_i[n + j] = 1$) und somit wird die Klausel C_j von α_U erfüllt. Falls die Zahl r'_i mit $r'_i[n+j] = 1$ in U enthalten ist, dann wurde $\alpha_U(x_i) = 0$ gesetzt. Nach der Konstruktion tritt die Variable x_i in C_j negativ auf (weil $r'_i[n+j] = 1$) und somit wird die Klausel C_j ebenfalls von α_U erfüllt. Damit ist α_U eine erfüllende Belegung für Φ.

Lösung zu Aufgabe 29

Sei Σ ein Alphabet mit $|\Sigma| = k \geq 2$ und sei $w = a_1 a_2 \dots a_m$ ein Wort der Länge m über Σ. Um eine KNF-Formel anzugeben, die genau dann erfüllbar ist, wenn w eine Davenport-Schinzel-Sequenz der Ordnung 2 über Σ ist, verwenden wir Variablen $X_{a,j}$ für alle $a \in \Sigma$ und alle $1 \leq j \leq m$. Die Belegung der Variablen $X_{a,j}$ mit 1 soll bedeuten, dass an der Position j in w das Zeichen a steht, dass also $w_j = a$ gilt. Analog soll die Belegung mit 0 bedeuten, dass $w_j \neq a$.

Dann lässt sich die Bedingung (i) beschreiben durch die Teilformel

$$F_{\text{(i)}} = \bigwedge_{a \in \Sigma} \bigwedge_{1 \leq j \leq m-1} (\overline{X_{a,j}} \vee \overline{X_{a,j+1}}) .$$

Für alle möglichen Buchstaben und alle zwei aufeinanderfolgenden Positionen in w verbietet $F_{\text{(i)}}$, dass dort zweimal das gleiche Zeichen steht.

Um die Bedingung (ii) mit einer Teilformel zu beschreiben, müssen wir jeweils vier Positionen $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq m$ in w und zwei beliebige verschiedene Zeichen a und b aus Σ betrachten und auf diesen Positionen das Muster $abab$ ausschliessen. Für konkrete Positionen muss also gelten

$$\neg(X_{a,j_1} \wedge X_{b,j_2} \wedge X_{a,j_3} \wedge X_{b,j_4}) .$$

Dies ist äquivalent zu der Klausel

$$Z_{a,b,j_1,j_2,j_3,j_4} = (\overline{X_{a,j_1}} \vee \overline{X_{b,j_2}} \vee \overline{X_{a,j_3}} \vee \overline{X_{b,j_4}}) .$$

Damit ergibt sich für die Bedingung (ii) die Teilformel

$$F_{\text{(ii)}} = \bigwedge_{a,b \in \Sigma, a \neq b} \; \bigwedge_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \leq m} Z_{a,b,j_1,j_2,j_3,j_4}$$

und insgesamt zur Beschreibung der Davenport-Schinzel-Bedingung der Ordnung 2 für das Wort w die KNF-Formel

$$F_{\text{(i)}} \wedge F_{\text{(ii)}} .$$

Weil unsere Formel aber nicht nur für ein konkretes Wort w, sondern für eine gegebene Wortlänge m beschreiben soll, ob es eine Davenport-Schinzel-Sequenz dieser Länge über Σ gibt, müssen wir in der Formel festhalten, dass die Belegung der Variablen $X_{a,j}$ tatsächlich einem Wort entspricht.

Die Teilformel

$$F_{\text{Wort},1} = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \; \bigwedge_{a,b \in \Sigma, a \neq b} (\overline{X_{a,i}} \vee \overline{X_{b,i}})$$

beschreibt, dass an einer Position des Wortes nicht zwei verschiedene Buchstaben stehen können. Weiterhin beschreibt die Teilformel

$$F_{\text{Wort},2} = \bigwedge_{1 \leq i \leq m} \bigvee_{a \in \Sigma} X_{a,i} ,$$

dass an jeder Position des Wortes mindestens ein Buchstabe steht.

Damit ergibt sich insgesamt die Formel

$$F_{\text{(i)}} \wedge F_{\text{(ii)}} \wedge F_{\text{Wort},1} \wedge F_{\text{Wort},2} .$$